ΠΡΟΣΟΧΗ:

Εμάς μας ενδιαφέρει μέχρι εμβαδόν (επειδή πχ ένας όγκος δεν έχει προσανατολισμό) μόνο το $|\det Dg(r,\theta,\varphi)|$

$\xRightarrow{\text{ΚΑΝ}}$ Αν $T=[r_1,r_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\subseteq(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)$

$$\int_{g(T)} f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cdot \underbrace{r^2\sin\theta}_{|\det Dg(r,\theta,\varphi)|}\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

(α) Ο τύπος ισχύει $\forall T$ Jordan-μετρήσιμο και συμπαγές, αλλά στα δεξιά θα έχει

$$\int_T f(\dots)\,r^2\sin\theta\,d(r,\theta,\varphi)$$

(β) Ο τύπος ισχύει και για τα παρακάτω

$T=[r_1,r_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\subset[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le R^2\}$, $V(M)=\int_M 1\,d(x,y,z)$

Θεωρώ $M=g(T)$

$T=[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$

$\rightsquigarrow V(M)=\int_T 1\cdot r^2\sin\theta\,d(r,\theta,\varphi)=$

$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} 1\cdot(r^2\sin\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi=$

$=2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^R r^2\,dr\right)=\dfrac{4\pi R^3}{3}$

Παράδειγμα | Άσκηση:

Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Λύση

Η e^{-x^2} άρτια συνάρτηση, άρα από Απ2

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\cdot\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} dx :=$$

$$= 2\cdot\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2} dx,$$

(1) $f(R) = \int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y)$, όπου

$B_R := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R^2\}$

Κάνοντας χρήση Πολικών συντεταγμένων

$x = r\cos\varphi$ & $y = r\sin\varphi$

$x^2+y^2 = r^2 \Rightarrow \|(x,y)\| = r$

Άρα η (1) είναι (με πολικές)

$$f(R) = \int_{g(T)} e^{-r^2}\cdot r\, d\varphi\, dr = 2\pi\int_0^R e^{-r^2}\cdot r\, dr = \pi(1-e^{-R^2})$$

όπου $g(T) = [0,R]\times[0,2\pi]$

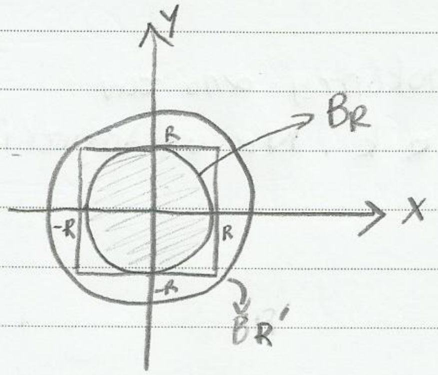
όταν $R\to\infty$ τότε το $R(f) = \pi$

έπειτα,

$$h(R) = \int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-x^2y^2}\, d(x,y) \overset{\text{fubini}}{=}$$

$$= \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}\, dx\, dy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}dy\right) =$$

$$= \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2$$



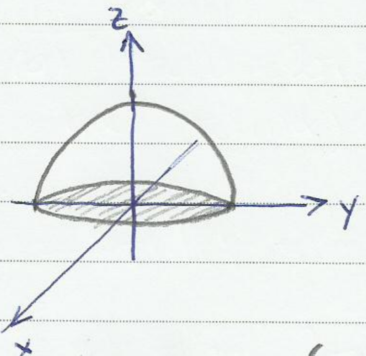
Επειδή

$(\forall R>0)(\exists R'>0): f(R)<h(R)<f(R')<\pi$

$\rightsquigarrow \lim_{R\to\infty} h(R)=\pi \Rightarrow$

$\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Έστω H το άνω μισό μιας μπάλας κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $R>0$. Υπολογίστε το $\int_H z\, d(x,y,z)$

ΛΥΣΗ.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ r\cdot\cos\theta \end{pmatrix} = g(r,\theta,\varphi)$$

με $(r,\theta,\varphi)\in[0,R]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,2\pi]$

$$\int_H z\, d(x,y,z) = \int_T r\cdot\cos\theta\cdot r^2\cdot\sin\theta\, d(r,\theta,\varphi) =$$

$$= \int_0^R\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} r^3\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\, \underline{d\varphi\, d\theta\, dr} =$$

$$= 2\pi\cdot\left(\int_0^R r^3 dr\right)\cdot\left(\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cdot\cos\theta\, d\theta =\right.$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta} = \frac{1}{2}$$

Άρα, $\int_H z\, d(x,y,z) = \cancel{2}\pi\,\frac{R^4}{4}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\pi R^4}{4}$